可展面歯形曲面論

荻野修作

工業短期大学部

1. まえがき

線接触をなす，一般歯車の噛合に関する基礎的問題は既に古く，谷村正義氏[1]により，解かれている。氏の理論は，噛合条件式，相対曲率の算式，接触線の近傍における両歯面の干渉の議論から成り立つ。[2]谷村氏の理論より後れて，直線接触の場合の噛合論が，非可展面歯形については，前田和彦氏[3]により，可展面歯形については，松山多賀一氏[4]により夫々論ぜられたが，それらは，何れも単に噛合条件式を論ずるに止まっている。これらに対して，横田晃氏[5]は，谷村氏の理論の特殊化として，直線接触の場合を論ぜられ，可展面の場合と非可展面の場合との差異のよって来る所以を明らかにされた。横田氏の理論は，可展面歯車について云えば，直線接触歯車の特段の場合として，可展面歯車を論ずるものである[6]が，これに対して，点接触噛合の特段の場合として，線接触噛合を理解しようという試みが本報告である。ただし，それは表題で示す如く可展面歯形曲面の場合に限られる。そしてそれは“共通接平面の包絡面を与えるときの可展面歯形曲面論”であり，可展面歯形曲面の噛合は，点接触であれ，線接触であれ，その噛合の各瞬間においては，接触点の近傍で考えて，一般に円錐の母線上での，乃至は母線に沿うての噛合と看做し得ると云うことを基調とする。かくて，可展面歯形曲面の噛合について，直観的な明瞭な像が得られ，また線接触の場合の噛合条件式は，難渋な考察を経ずして，簡明直截に導出され，しかも平面歯車の場合の自然の拡張として，可展面歯車の噛合論が得られるのである。なお，議論に使用したベクトルはすべて実である。

2. 歯形平面により創成される歯形曲面

点Oを座標原点とする静止座標系で考えて，時間 t と共に動く動平面をベクトル方程式

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x} = \mathrm{p} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

で与える。ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$，スカラー p は何れも時間 t の関数であり，且

$$\boldsymbol{\lambda}^2 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

とする。別の定点 O_1 を原点とし，O_1 を通る定直線 A_1 を軸として定角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ で回転する座標系 I をとり，この回転座標系内における平面(1)の包絡面を Γ_1 とすれば，Γ_1 は一般に可展面であり，これが歯形平面(1)により創成される歯形曲面である。以下これについて考察し，次章以下の導入とする。

$$\overrightarrow{OO_1} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - \mathbf{e}_1, \quad \mathrm{p}_1 = \mathrm{p} - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{e}_1$$

とおけば，(1) は $\quad \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x}_1 = \mathrm{p}_1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$

さて t の関数であるベクトルを静止座標系内または回転座標系 I 内で，t について微分することを夫々記号 d/dt, d_1/dt と表わして区別することとし，更に

$$d\boldsymbol{\lambda}/dt = \boldsymbol{\lambda}_t, \quad d\boldsymbol{\lambda}_t/dt = \boldsymbol{\lambda}_{tt}, \quad \cdots\cdots$$

$$d_1\boldsymbol{\lambda}/dt = \boldsymbol{\lambda}_{1t}, \quad d_1\boldsymbol{\lambda}_{1t}/ = \boldsymbol{\lambda}_{1tt}, \quad \cdots\cdots$$

の如く略記すれば

$$\boldsymbol{\lambda}_{1t} = \boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\lambda}_{1tt} = \boldsymbol{\lambda}_{tt} - 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda}_t + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda}), \quad \cdots\cdots$$

そこで，(2) を回転座標系内で二回続けて微分すれば

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{1t} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4), \qquad \boldsymbol{\lambda}^2_{1t} + \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{1tt} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

また (3) を回転座標系内で二回続けて微分すれば

$$\boldsymbol{\lambda}_{1t}\cdot\mathbf{x}_1 = p_{1t} \quad \cdots\cdots (6), \qquad \boldsymbol{\lambda}_{1tt}\cdot\mathbf{x}_1 = p_{1tt} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

ここに　$p_{1t} = p_t - \boldsymbol{\lambda}_t\cdot\mathbf{e}_1, \quad p_{1tt} = p_{tt} - \boldsymbol{\lambda}_{tt}\cdot\mathbf{e}_1$

考えているすべての t に対して，恒等的に $\boldsymbol{\lambda}_{1t} \equiv 0$，$p_{1t} \equiv 0$ ならば，これは歯形平面が回転座標系内で，固定されている場合である。$\boldsymbol{\lambda}_{1t} \equiv 0$，$p_{1t} \neq 0$ ならば，互に平行に動く平面の場合であり，何れにしても，包絡面を結ばない。そこで，以下 $\boldsymbol{\lambda}_{1t}$ は恒等的には0ではないとし，かつ $\boldsymbol{\lambda}_{1t} \neq 0$ なる t について考えることにする。

(4) は，二平面 (3)，(6) が互に垂直なることを示すが，その交線が t をパラメーターとする平面群 (3) の特性直線であり，これら特性直線が時間 t と共に動いて，平面群 (3) の包絡面 Γ_1 を形成する。云い換えれば，(3) は歯形曲面 Γ_1 の接平面であり，特性直線は，歯形曲面 Γ_1 と歯形平面 (3) との接触線である。そして，この接触直線に沿うての歯形曲面 Γ_1 の法平面が (6) である。時間 t での隣接二法面の交線は，(6)，(7) の解として与えられるが，嚙合の各瞬間で考えて，歯形曲面 Γ_1 は，この隣接二法面の交線を軸とし，接触直線を母線とする円柱，または円錐で置き換えて，考察されるわけである。

さて，時間 t での接触直線上の点 $\mathbf{x}$ での主方向は，接触直線の方向 $\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\lambda}_{1t}$ 及びこれに垂直な接方向 $\boldsymbol{\lambda}_{1t}$ で与えられる。主方向 $\boldsymbol{\lambda}_{1t}$ に向う曲面 Γ_1 の点 $\mathbf{x}_1$ を通る曲率線に沿うての点 $\mathbf{x}_1$ における曲面 Γ_1 の隣接二法線の交点は，主曲率円の中心であるが，それを $\mathbf{x}_1 + R_1\boldsymbol{\lambda}$ とかけば，これは隣接二法面の交線上にあるを要し，従って平面 (7) 上になければならぬ。よって　$\boldsymbol{\lambda}_{1tt}\cdot(\mathbf{x}_1 + R_1\boldsymbol{\lambda}) = p_{1tt}$

(5) を用いて

$$R_1 = (\boldsymbol{\lambda}_{1tt}\cdot\mathbf{x}_1 - p_{1tt})/\boldsymbol{\lambda}^2_{1t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

この R_1 は接触線上の点 $\mathbf{x}_1$ における，主方向 $\boldsymbol{\lambda}_{1t}$ に対する主曲率半径である。

ここで　$\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\lambda}_{1t}/\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^2_{1t}}, \quad \boldsymbol{\nu}_1 = \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\mu}_1$

とおけば $\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{\mu}_1$，$\boldsymbol{\nu}_1$ は二つ宛互に垂直な単位ベクトルであり

$$\boldsymbol{\nu}_{1t} = \frac{d_1}{dt}\frac{\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\lambda}_{1t}}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^2_{1t}}} = -\frac{[\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}_{1t}\,\boldsymbol{\lambda}_{1tt}]}{\boldsymbol{\lambda}^2_{1t}}\frac{\boldsymbol{\lambda}_{1t}}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^2_{1t}}}$$

よって　$\tau_1 = \sqrt{\boldsymbol{\lambda}^2_{1t}}, \quad \rho_1 = [\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}_{1t}\,\boldsymbol{\lambda}_{1tt}]/\boldsymbol{\lambda}^2_{1t}$

とおけば　$\boldsymbol{\lambda}_{1t} = \tau_1\boldsymbol{\mu}_1,\ \boldsymbol{\nu}_{1t} = -\rho_1\boldsymbol{\mu}_1$

従って　$\boldsymbol{\mu}_{1t} = d_1(\boldsymbol{\nu}_1 \times \boldsymbol{\lambda})/dt = \boldsymbol{\nu}_{1t} \times \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\nu}_1 \times \boldsymbol{\lambda}_{1t} = \rho_1\boldsymbol{\nu}_1 - \tau_1\boldsymbol{\lambda}$

かような時間 t での接触直線に附随した互に垂直な単位ベクトルをとると，接触直線の方程式は，$\overline{\mathbf{x}}_1$ を接触直線上の一点，r_1 をパラメーターとして　$\mathbf{x}_1 = \overline{\mathbf{x}}_1 + r_1\boldsymbol{\nu}_1$

とかける。これを (8) へ代入して

$$R_1 = \overline{R}_1 + r_1(\rho_1/\tau_1) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

$\overline{R_1}$ は点 $\overline{\mathbf{x}_1}$ での主方向 $\boldsymbol{\mu}_1$ に対する主曲率半径である。

$\rho_1 = [\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}_{1t}\boldsymbol{\lambda}_{1tt}]/\lambda^2{}_{1t} \equiv 0$ の場合は $R_1 = \overline{R_1}$ であり，時間 t での接触直線上の点での主曲率半径はすべて同一の値をとる。この値が恒等的に 0 であれば，Γ_1 は一直線を，0 でなければ，柱面を表わす。従って

$[\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}_{1t}\boldsymbol{\lambda}_{1tt}] \equiv 0$ の場合 $\boldsymbol{\lambda}_{1tt} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{1tt}\boldsymbol{\lambda} + (\boldsymbol{\lambda}_{1t}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{1tt}/\lambda^2{}_{1t})\boldsymbol{\lambda}_{1t}$ だから

$p_{1tt} \equiv p_1\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{1tt} + p_{1t}\boldsymbol{\lambda}_{1t}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{1tt}/\lambda^2{}_{1t}$ ならば Γ_1 は直線

$p_{1tt} \neq p_1\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{1tt} + p_{1t}\boldsymbol{\lambda}_{1t}\cdot\boldsymbol{\lambda}_{\cdot tt}/\lambda^2{}_{1t}$ ならば Γ_1 は柱面

を表わす。

$\rho_1 \neq 0$ の場合は，各々の時間tでの接触直線について，主曲率半径 $R_1 = 0$ となる点が一つ宛ある。それは (9) で $r_1 = -\overline{R_1}\tau_1/\rho_1$ に対する点である。この点を $\mathbf{y}_1$ とすれば，それは三平面 (3)，(6)，(7) の交点であるから

$$\mathbf{y}_1 = (p_1\boldsymbol{\lambda}_{1t} \times \boldsymbol{\lambda}_{1tt} + p_{1t}\boldsymbol{\lambda}_{1tt} \times \boldsymbol{\lambda} + p_{1tt}\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\lambda}_{1t})/[\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}_{1t}\boldsymbol{\lambda}_{1tt}]$$

t をパラメーターと看做せば，点 $\mathbf{y}_1$ は回転座標系内で，一般に空間曲線をえがき，これは曲面 Γ_1 の反帰曲線である。

さて　$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{y}_1 = p_1$，$\boldsymbol{\lambda}_{1t}\cdot\mathbf{y}_1 = p_{1t}$，　$\boldsymbol{\lambda}_{1tt}\cdot\mathbf{y}_1 = p_{1tt}$

だから　$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{y}_{1t} = 0$，$\boldsymbol{\lambda}_{1t}\cdot\mathbf{y}_{1t} = 0$，　$\boldsymbol{\lambda}_{1tt}\cdot\mathbf{y}_{1t} = \kappa_1$

ただし　$\kappa_1 = p_{1ttt} - \boldsymbol{\lambda}_{1ttt}\cdot\mathbf{y}_1$

従って　$\mathbf{y}_{1t} = (\kappa_1/\rho_1\tau_1)\,\boldsymbol{\nu}_1$

$\kappa_1 \equiv 0$　即ち

$$p_{1ttt} \equiv (p_1[\boldsymbol{\lambda}_{1t}\boldsymbol{\lambda}_{1tt}\boldsymbol{\lambda}_{1ttt}] + p_{1t}[\boldsymbol{\lambda}_{1tt}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}_{1ttt}]+p_{1tt}[\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}_{1t}\boldsymbol{\lambda}_{1ttt}]/[\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}_{\cdot t}\boldsymbol{\lambda}_{1tt}]$$

の場合は $\mathbf{y}_{1t} \equiv 0$ となるので，反帰曲線は一点に縮まり，従って曲面 Γ_1 は錐面である。

$\kappa_1 \neq 0$ の場合を考える。反帰曲線の弧長をsとすれば，

$$d_1\mathbf{y}_1/ds = \mathbf{y}_{1t}\,(dt/ds) = (\kappa_1/\rho_1\tau_1)\,(dt/ds)\,\boldsymbol{\nu}_1$$

$d_1\mathbf{y}_1/ds$ 及び $\boldsymbol{\nu}_1$ は単位ベクトルなので

$$dt/ds = +\rho_1\tau_1/\kappa_1$$

なるよう曲線の向きを定めれば　$d_1\mathbf{y}_1/ds = \boldsymbol{\nu}_1$

$$\therefore\ d_1{}^2\mathbf{y}_1/ds^2 = -\rho_1\,(dt/ds)\,\boldsymbol{\mu}_1 = -(\rho_1{}^2\tau/\kappa_1)\,\boldsymbol{\mu}_1$$

従って $\boldsymbol{\mu}_1$，$\boldsymbol{\nu}_1$ は夫々反帰曲線の主法線単位ベクトル，接線単位ベクトルであり，$\boldsymbol{\lambda}$ は従法線単位ベクトルである。

$$d_1\boldsymbol{\lambda}/ds = \tau_1(dt/ds)\,\boldsymbol{\mu}_1 = (\rho_1\tau_1{}^2/\kappa_1)\,\boldsymbol{\mu}_1$$

なので，反帰曲線の曲率，捩率は夫々

$$-\rho_1{}^2\tau_1/\kappa_1,\quad \rho_1\tau_1{}^2/\kappa_1$$

以上で，歯形平面により創成される歯形曲面の全貌が知られたわけである。

次に，接触直線の近傍での干渉を考察する。

既に述べたように，時間 t での両歯形曲面の噛合は，接触直線を母線，接触直線に沿うての曲面 Γ_1 の隣接二法面の交線を軸とする円柱または円錐と歯形平面との噛合と看做せる。時間 t での接触直線上の点 $\mathbf{x}_1$ が反帰曲線上の点であれば，点 $\mathbf{x}_1$ における主曲率半径 R_1 は 0 となる。そして，接触直線の範囲に，反帰曲線上の点があれば，曲面 Γ_1 は歯形平面の表裏にまたがり，干渉を惹起する。よって主曲率半径 R_1 の符号が一定とな

るよう，接触直線の有効範囲を定めるを要する。今 $R_1 > 0$ とすればベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ の正の向きは曲面 Γ_1 の凸面から凹面へ向いている。従って曲面 Γ_1 が主動片なるか否かに従い $0 \gtrless \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1$。ここに $\mathbf{v}_1$ は角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ による点 $\mathbf{x}_1$（$= \mathbf{x} - \mathbf{e}_1$）の速度であり，したがって $\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{x} - \mathbf{e}_1)$. である。$R_1 < 0$ の場合を考え併せて

歯形曲面 Γ_1 が主動片なるか否かに従ひ　$0 \gtrless \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1/R_1$

この条件及び

R_1 の符号が一定

なることが，接触線の軌跡面の採用し得る範囲を定める。接触線の軌跡面の方程式は，静止座標系に関して

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x} = p \quad \cdots\cdots (1)\,, \qquad (\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda})\cdot\mathbf{x} = p_t + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda} \quad \cdots\cdots (6)'$$

で与えられる。

接触線上 $R_1 = 0$ なる点は一般に，反帰曲線上の点であることは述べた。$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1 = 0$ なる点について考えてみよう。(6)′ から　$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1 = p_t - \boldsymbol{\lambda}_t\cdot\mathbf{x}$

従って $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1 = 0$ となる時間 t での接触直線上の点 $\mathbf{x}$ は，静止座標系で考えて，連立方程式

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x} = p \qquad \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x} = -\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda} \qquad \boldsymbol{\lambda}_t\cdot\mathbf{x} = p_t$$

の解である。$[\boldsymbol{\lambda}\ \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda}\ \boldsymbol{\lambda}_t] = \boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_t$ だから $\boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_t \neq 0$ の場合は，時間 t での接触直線上 $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1 = 0$ なる点はただ一つに定まり，それは

$$\mathbf{x} = \{\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}\ \boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\lambda}_t + p_t\boldsymbol{\lambda} \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda})\}/\boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_t + p\boldsymbol{\lambda}$$

t をパラメーターとして，これは一つの曲線を表わすが，これが接触線の軌跡面上で一つの限界曲線を与える。なお，この干渉点は，時間 t での両歯形曲面の接触直線と，歯形平面群 (1) の静止座標系内での包絡面の時間 t での特性直線との交点として理解される。

3. 可展面歯形歯車の嚙合条件

可展面 Γ_1，Γ_2 を夫々歯形曲面とする歯車 I，II が嚙合い乍ら，空間におかれた二定直線 A_1，A_2 を軸とし定角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$，$\boldsymbol{\omega}_2$ で回転しているとする。歯車 I，II の軸 A_1，A_2 の共通垂線が，両軸を截る点を夫々 O_1，O_2 そして O_1O_2 上に原点Oを定め

$$\overrightarrow{OO_i} = \mathbf{e}_i \quad (i = 1,2)\,, \qquad \overrightarrow{O_1O_2} = \mathbf{e}$$

とおく。O を原点とする静止座標系に関して，時間 t での嚙合点における共通接平面を

$$\boldsymbol{\lambda}(t)\cdot\mathbf{x} = p(t)\,, \qquad \boldsymbol{\lambda}^2 = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

とする。この共通接平面は一般に回転座標系 I または II で夫々可展面を包絡するが，それが初めの歯形曲面 Γ_1，Γ_2 である。(10) を回転座標系 I または II 内において，時間 t で微分すれば

$$(\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda})\cdot\mathbf{x} = p_t + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

$$(\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\lambda})\cdot\mathbf{x} = p_t + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

時間 t で考えて平面 (11)，(12) は何れも共通接平面に垂直であり (10) と (11)，(10) と (12) との交線が時間 t での共通接平面 (1) と歯形曲面 Γ_1 または Γ_2 との接触直線である。従って，これら接触直線の交角を θ とすると

相対角速度　$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1$

とおいて　$\sin\theta = |\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\lambda}_t - [\boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\lambda}]| / \sqrt{(\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\lambda})^2(\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{\lambda})^2}$

よって点接触をなすための条件は

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\lambda}_t \neq [\boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\lambda}] \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

直線に沿うて，接触しているための条件は，共通接平面に垂直な二平面（11），（12）が一致することであり，それは

$$(\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\lambda})/(\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{\lambda}) = (\mathrm{p}_t + \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda})/(\mathrm{p}_t + \boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda})$$

これから

$$(\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\lambda})/\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda} = (\mathrm{p}_t + \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda})/(\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda})$$

この比の値を $-\beta_1$ とおくと

$$\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\lambda} = -\beta_1\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathrm{p}_t + \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda} = \beta_1(\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda})$$

ここで　$\beta_2 - \beta_1 = 1$

なるスカラー β_2 を導入すれば

$$\boldsymbol{\lambda}_t = \beta_2\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\lambda} - \beta_1\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathrm{p}_t = -\beta_2\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda} + \beta_1\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda}$$

これが線接触をなすための条件であり，所謂嚙合方程式に他ならない。

4．点接触可展面歯車

共通接平面（10）が回転座標系ⅠまたはⅡ内で包絡する可展面 Γ_1，Γ_2 が点接触をするための条件は（13）である。この条件（13）の下で（10），（11），（12）を解けば

$$\mathbf{x} = \mathrm{p}\boldsymbol{\lambda} + \frac{\mathrm{p}_t(\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\omega})\times\boldsymbol{\lambda} - [\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{e}_1\boldsymbol{\lambda}]\{\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\lambda}_t - (\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{\lambda}\} + [\boldsymbol{\omega}_2\mathbf{e}_2\boldsymbol{\lambda}]\{\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\lambda}_t - (\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{\omega}_1)\times\boldsymbol{\lambda}\}}{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\lambda}_t - [\boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\lambda}]}$$

t をパラメーターと看做せば，これは接触点の軌跡を表わしている。

歯形曲面 Γ_1，Γ_2 に関しては，第2節により明らか。

接触点 $\mathbf{x}$ の近傍での両歯形曲面の干渉を論ずる。時間 t での接触点 $\mathbf{x}$ における歯形曲面 Γ_i の主曲率半径 R_i は

$$\mathrm{R}_i = \{\boldsymbol{\lambda}_{itt}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i) + \boldsymbol{\lambda}_{tt}\cdot\mathbf{e}_i - \mathrm{p}_{tt}\}/\boldsymbol{\lambda}^2_{it}$$

ここに

$$\boldsymbol{\lambda}_{it} = \boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{\lambda}, \qquad \boldsymbol{\lambda}_{itt} = \boldsymbol{\lambda}_{tt} - 2\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{\lambda}_t + \boldsymbol{\omega}_i\times(\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{\lambda})$$

そして $\mathbf{x} + \mathrm{R}_i\boldsymbol{\lambda}$ は接触点 $\mathbf{x}$ での曲面 Γ_i の主曲率円の中心。この $\mathbf{x}$ を曲面 Γ_i と共通接平面との接触直線に沿うて動かせば，$\mathbf{x} + \mathrm{R}_i\boldsymbol{\lambda}$ は直線 g_i をえがくが，既にこれまでも述べたように，両歯面の嚙合は瞬間的には，一般にこの直線 g_i を軸とし，接触直線を母線とする円柱または円錐の母線での点接触と看做せる。従って，両歯面は共通接平面に関して，互に反対側になければならず

$$\mathrm{R}_1\cdot\mathrm{R}_2 < 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

なるを要す。更に歯車Ⅰと共通接平面に関して，第2節の結果を適用すれば

歯車Ⅰが主動片なるか否かに従い　$0 \gtrless \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1/\mathrm{R}_1$

共通接平面と歯車Ⅱに関しては

歯車IIが従動片なるか否かに従い　　$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_2/R_2 \gtrless 0$

かくて歯車I，IIの直接の嚙合に関して

歯車Iが主動片なるか否かに従い　　$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_2/R_2 \gtrless \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1/R_1$　　…………(15)

更に，何れか一方を主動片と定めるとき

$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1 = p_t - \boldsymbol{\lambda}_t\cdot\mathbf{x}$ の符号が一定　　……………………(16)

でなければならぬ。以上の（14），（15）及び（16）が接触点の軌跡として，採用し得る範囲を制限する。

以上が点接触可展面歯車の嚙合論である。これをインボリュートねじ歯車の場合に適用してみよう。それには，共通接平面（10）で

$$\boldsymbol{\lambda}：\text{定ベクトル}，\quad p_t = u：\text{定数}$$

とすればよい。先ず歯形曲面 Γ_i について。歯形曲面 Γ_i と共通接平面の交線上の点 $\mathbf{x}_i$ での主曲率半径 R_i は

$$R_i = -[\boldsymbol{\omega}_i\ \boldsymbol{\lambda}\ \mathbf{v}_i]/(\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\lambda})^2, \qquad \mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{x}_i$$

この交線上 $R_i = 0$ となる点を $\mathbf{y}_i$ とすれば

$$\mathbf{y}_i = \{(p - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{e}_i)/\boldsymbol{\omega}_i\cdot\boldsymbol{\lambda}\}\boldsymbol{\omega}_i - \{u/(\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\lambda})^2\}\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\lambda} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

t をパラメーターとして，これは曲面 Γ_i の反帰曲線を表わす。そしてこの曲線は，歯車軸を軸とする，半径 $|u|/\sqrt{(\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\lambda})^2}$ の円柱上にのることが知られる。

また

$$\mathbf{y}_{it} = (-\boldsymbol{\omega}_i) \times \mathbf{y}_i + (-\boldsymbol{\omega}_i)(-u)/\boldsymbol{\omega}_i\cdot\boldsymbol{\lambda}$$

となるので，t を動かすと，点 $\mathbf{y}_i$ は角速度 $-\boldsymbol{\omega}_i$，ピッチ $-u/\boldsymbol{\omega}_i\cdot\boldsymbol{\lambda}$ のねじ運動をする。即ち歯形曲面 Γ_i の反帰曲線は，歯車軸を軸とし，半径 $|u|/\sqrt{(\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\lambda})^2}$ の直円柱上のつる巻線である。曲面 Γ_i は反帰曲線の接線曲面だから，これで，Γ_i がインボリュート・ヘリコイドなることが知られたわけである。更に反帰曲線の曲率，捩率は夫々

$$(\boldsymbol{\omega}_i\cdot\boldsymbol{\lambda})^2\sqrt{(\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\lambda})^2}/u\boldsymbol{\omega}_i^2, \quad -\boldsymbol{\omega}_i\cdot\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\lambda})^2/u\boldsymbol{\omega}_i^2$$

と計算される。さて，時間 t での共通接平面（10）と各々の歯形曲面との接触直線に沿う法平面は

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x} = -u - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x} = -u - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda} \qquad \cdots\cdots(18)$$

これは各々の歯車の基礎円柱に接する定平面であり，所謂作用平面である。

共通接平面（10）上にのる二つの接触直線のなす角 θ は

$$\sin\theta = |[\boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\lambda}]|/\sqrt{(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda})^2(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\lambda})^2}$$

で与えられ，従って点接触なるための条件は

$$[\boldsymbol{\omega}_2\,\boldsymbol{\omega}_1\,\boldsymbol{\lambda}] \neq 0$$

即ち平行軸でなく，且共通接平面が，両歯車軸の共通垂線に平行とならぬことである。この条件の下で，（10），（18）を解けば　　$\mathbf{x} = p\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{a}$,

$$\mathbf{a} = \{u\boldsymbol{\lambda} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda}) + [\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{e}_1\boldsymbol{\lambda}](\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\lambda} + [\boldsymbol{\omega}_2\mathbf{e}_2\boldsymbol{\lambda}](\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\lambda}\}/[\boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\lambda}]$$

t をパラメーターとして，$\mathbf{x}$ は接触点の軌跡を表わすが，これは両基礎円柱に接し，定方向 $\boldsymbol{\lambda}$ の定直線である。点 $\mathbf{a}$ は，座標原点Oから，接触点の軌跡である直線へ下した垂線の足を表わす。

次に干渉の条件を適用して，接触点の軌跡として，採用し得る範囲を定めよう。時間 t

での共通接平面と歯形曲面 $\boldsymbol{\Gamma}_i$ との接触直線上 $R_i = 0$ なる点 $\mathbf{y}_i$ を座標原点Oからみて，$\mathbf{y}^{(i)}$ とかけば，(17) によって

$$\mathbf{y}^{(i)} = \{(p - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{e}_i)/\boldsymbol{\omega}_i\cdot\boldsymbol{\lambda}\}\boldsymbol{\omega}_i - \{u/(\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\lambda})^2\}\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{e}_i$$

t をパラメーターとして，これは各歯車軸に平行な直線を表わすが，この直線に沿うて，各歯車の基礎円柱と作用平面とが，接している訳である。この二直線と接触点の軌跡とは交わるが，その点を $\mathbf{y}_0{}^{(i)}$ とかけば，接触点の軌跡は $\mathbf{x} = \mathbf{y}_0{}^{(i)} + r_i\boldsymbol{\lambda}$
と表わされる。点 $\mathbf{y}_0{}^{(i)}$ での主曲率半径は 0 だから，この点 $\mathbf{x}$ での主曲率半径 R_i は

$$R_i = - r_i$$

条件 (14) により r_1，r_2 は異符号なるを要し，従って接触点の軌跡として，採用出来るのは，二点 $\mathbf{y}_0{}^{(1)}$，$\mathbf{y}_0{}^{(2)}$ を結ぶ線分またはその一部分である。[7] なお $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_2 = u \neq 0$ である。

5. 線接触可展面歯車

O を座標原点とする静止座標系に関して，時間と共に動く共通接平面 (10) が与えられているとき，この共通接平面の各歯車系内における包絡面として，与えられる歯形曲面 $\boldsymbol{\Gamma}_1$，$\boldsymbol{\Gamma}_2$ が直線に沿うて，噛合を続けるための条件は第3節で求めたように

$$\boldsymbol{\lambda}_t = \beta_2\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda} - \beta_1\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\lambda} \quad \cdots\cdots (19)$$

$$p_t = - \beta_2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda} + \beta_1\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda} \quad \cdots\cdots (20)$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 1 \quad \cdots\cdots (21)$$

である。条件(19)について考察する。$\boldsymbol{\omega}_1$ または $\boldsymbol{\omega}_2$ とのスカラー積を作り $\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\Pi}$ とおくと

$$\boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_t = \beta_1\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} \quad \cdots\cdots (22), \qquad \boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\lambda}_t = \beta_2\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} \quad \cdots\cdots (23)$$

(23)−(22) を作れば $\quad \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} \quad \cdots\cdots (24)$

従って $\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} \neq 0$ の場合は

$$\beta_1 = \boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_t/\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\lambda}_t\ ,\ \beta_2 = \boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\lambda}_t/\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\lambda}_t \quad \cdots\cdots (25)$$

逆に条件 (24) が成立し，且 $\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} \neq 0$ とする。(25) により β_1，β_2 を定めれば

$$\begin{aligned}\beta_2\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda} - \beta_1\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\lambda} &= (\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\lambda}_t\ \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_t\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\lambda})/\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\lambda}_t \\ &= \{\boldsymbol{\lambda}_t \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2)\} \times \boldsymbol{\lambda}/\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} = -(\boldsymbol{\lambda}_t \times \boldsymbol{\Pi}) \times \boldsymbol{\lambda}/\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} \\ &= \boldsymbol{\lambda}_t\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda}/\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_t\end{aligned}$$

となり (19) が成立する。よって $\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} \neq 0$ の場合 (19) と (24) とは同値である。

$\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0$ の場合 β_1，β_2 は(25)によっては与えられない。考えているすべての t の値に対して，恒等的に $\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} \equiv 0$ となる場合を調べてみよう。

先ず $\boldsymbol{\Pi} = 0$ 即ち平行軸の場合は確かに $\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} \equiv 0$ である。$\boldsymbol{\Pi} \neq 0$ としよう。(22)，(23) から $\boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}_t = 0$，$\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\lambda}_t = 0$

$$\therefore\ \boldsymbol{\lambda}_t = \alpha\boldsymbol{\Pi}\ ,\ \alpha \text{ はスカラー}$$

一方 $\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda} \equiv 0$ から $\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\lambda}_t = 0$ を得るので $\alpha\boldsymbol{\Pi}^2 = 0$，$\alpha = 0$

よって $\boldsymbol{\lambda}_t \equiv 0$ であり，$\boldsymbol{\lambda}$ は定ベクトルである。したがって (19) から

$\beta_2\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda} = \beta_1\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\lambda}$ を得るが，これと (21) とから

$$\beta_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda}/(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda})^2 \qquad (i = 1,2)$$

β_1，β_2 は定数なので (20) から p_t は定数である。これは第4節で述べたインボリュー

トねじ歯車の線接触となる場合であり，Olivier の歯形の場合である。これで

$\Pi\cdot\boldsymbol{\lambda}\equiv 0$ となるのは，平行軸の場合か，Olivier の歯形の場合の何れかであることが分かった。

次に，一般の場合に立戻り，歯形曲面 Γ_1，Γ_2 について考察しよう。

共通接平面（10）を O_i を原点とする回転座標系からみれば

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{x}_i+\mathbf{e}_i)=\mathrm{p} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)'$$

これを同じ回転座標系内で微分するに

$$\boldsymbol{\lambda}_{it}=-\beta_i\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda},\quad \mathbf{e}_{it}=-\boldsymbol{\omega}_i\times\mathbf{e}_i,\quad \mathrm{p}_t=\beta_i(\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{\omega}_i\times\mathbf{e}_i\cdot\boldsymbol{\lambda}$$

となるので $\beta_i\neq 0$ なる条件の下に

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{x}_i+\mathbf{e}_i)=\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

更にこの平面を同じ回転座標系内で微分するに $d_i\boldsymbol{\omega}/dt=\Pi$ だから

$$\{\Pi\times\boldsymbol{\lambda}-\beta_i\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})\}\cdot(\mathbf{x}_i+\mathbf{e}_i)=\beta_i(\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2-\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1)\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\lambda} \quad \cdots\cdots (27)$$

これら三平面（10)′，(26)，(27）を座標原点Oからみれば

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x}=\mathrm{p} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{w}=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (26)'$$

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q}-\beta_i[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}]=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (27)'$$

ここに $\mathbf{w}$ は歯車Ⅱの歯車Ⅰに対する相対速度であり

$$\mathbf{w}=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1,\qquad \mathbf{v}_i=\boldsymbol{\omega}_i\times\mathbf{x}_i$$

また $\mathbf{q}$ は谷村氏[(1)] によるベクトルであり

$$\mathbf{q}=\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{v}_1-\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{v}_2$$

二平面（10)，(26)′ の交線が，両歯形曲面の接触直線で，この接触直線に沿うての両歯形曲面の接触直線上の点 $\mathbf{x}$ における，主方向 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda}$ に向う曲面 Γ_i の主曲率半径を R_i，従って主曲率中心を $\mathbf{x}+R_i\boldsymbol{\lambda}$ とすれば，これが平面（27)′ 上にあることから

$$R_i=(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q}-\beta_i[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}])/\beta_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})^2$$

従って接触線に垂直な法截口での歯形曲面 Γ_2 の Γ_1 に対する相対曲率は

$$1/R_2-1/R_1=\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})^2/(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q}-\beta_1[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}])(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q}-\beta_2[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}])$$

これは，後で干渉を論ずる際に用いられる。

さて，直線接触の場合は，各接触直線に附随した直交座標系をとることが出来る。即ち

$$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda}/\sqrt{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})^2},\qquad \boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\lambda}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})/\sqrt{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})^2}$$

とおけば，$\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{\nu}$ は二つ宛互に垂直なベクトルであり，第2節における如く

$$\boldsymbol{\lambda}_{it}=\tau_i\boldsymbol{\mu},\quad \boldsymbol{\mu}_{it}=-\tau_i\boldsymbol{\lambda}+\rho_i\boldsymbol{\nu},\quad \boldsymbol{\nu}_{it}=-\rho_i\boldsymbol{\mu}$$

ここに　$\tau_i=-\beta_i\sqrt{(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})^2}$，$\rho_i=[\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}_{it}\boldsymbol{\lambda}_{itt}]/\tau^2{}_i$

ところで　$\boldsymbol{\lambda}_{it}=-\beta_i\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda}$，

$$\boldsymbol{\lambda}_{itt}=-\beta_{it}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda}-\beta_i\Pi\times\boldsymbol{\lambda}+\beta_i{}^2\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})$$

であるから　$\rho_i=-\beta_i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\lambda}-[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\Pi]/(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})^2$

時間 t での接触直線上に一点 $\overline{\mathbf{x}}$ を定め，その点での，主方向 $\boldsymbol{\mu}$ に向う曲面 Γ_i の主曲率半径を $\overline{R}_i$ とすれば，接触直線上の任意の点 $\mathbf{x}=\overline{\mathbf{x}}+r_i\boldsymbol{\nu}$ における主曲率半径は

$$R_i=\overline{R}_i+r_i(\rho_i/\tau_i)$$

従って $\rho_i\equiv 0$ ならば，曲面 Γ_i は，一般に柱面である。

$\rho_i\not\equiv 0$ の場合は，$\rho_i\neq 0$ なる時間 t で考えて，接触線上主曲率半径 $R_i=0$ と

なる点が唯一つある。それは三平面 (10), (26)′, (27)′ の交点であり，曲面 Γ_i の反帰曲線上の点である。それを $\mathbf{y}^{(i)}$ とすれば，接触直線上の点は $\mathbf{x} = \mathbf{y}^{(i)} + r_i \boldsymbol{\nu}$ で表わされ，かかる点で主曲率半径は

$$R_i = r_i \ (\rho_i/\tau_i)$$

とかける。なお，必要あらば，第2節における如くして，曲面 Γ_i の反帰曲線の曲率，捩率を求めることが出来よう。

更に滑り率について考察しよう。

時刻 t での接触線は二平面 (10), (26)′ の交線である。その上の点 $\mathbf{x}_0(t)$ をとれば，接触線の方程式はrをパラメーターとして　$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t) + r\boldsymbol{\nu}(t)$

とかける。 $\mathbf{x}_r = \boldsymbol{\nu}$ であるが，$\mathbf{x}_t$ を求めようとする。時刻 $t + dt$ での噛合点を $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ とすれば

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_t \, dt + \boldsymbol{\nu} \, dr \qquad \cdots\cdots (28)$$

(10) から　$d\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}\cdot d\mathbf{x} = p_t \, dt$

(19), (20) を用いて，変形すると

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot(d\mathbf{x} - \mathbf{v}_1 \, dt + \beta_1 \, \mathbf{w}dt) = 0 \qquad \therefore \ \boldsymbol{\lambda}\cdot(d\mathbf{x} - \mathbf{v}_1 \, dt) = 0 \qquad \cdots\cdots (29)$$

(26)′ から　$d\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{w} + \boldsymbol{\lambda}\cdot d\mathbf{w} = 0$

$$\therefore \ \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x} = -\beta_1\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{w}dt + \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega}_1\cdot\mathbf{w}dt$$

$\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega}_1\cdot\mathbf{w} = \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{v}_1 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q}$ を用いて書き直せば

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda}\cdot(d\mathbf{x} + \beta_1\mathbf{w}dt - \mathbf{v}_1 dt) = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q}dt$$

$[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}] \neq 0$ の場合は　$b_1 = \beta_1 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} / [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}]$

とおけば　$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda}\cdot(d\mathbf{x} - \mathbf{v}_1 dt + b_1\mathbf{w}dt) = 0 \qquad \cdots\cdots (30)$

(28) を (29), (30) に代入して

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{x}_t - \mathbf{v}_1 + b_1\mathbf{w}) = 0, \qquad \boldsymbol{\mu}\cdot(\mathbf{x}_t - \mathbf{v}_1 + b_1\mathbf{w}) = 0$$

これから　$\mathbf{x}_t - \mathbf{v}_1 = -b_1\mathbf{w} + a\boldsymbol{\nu}$

$b_2 = b_1 + 1$　なる b_2 を導入すれば

$$\mathbf{x}_t - \mathbf{v}_2 = -b_2 \mathbf{w} + a\boldsymbol{\nu}$$

これらは第2節の初めに用いた記法で夫々

$$\mathbf{x}_{1t} = -b_1\mathbf{w} + a\boldsymbol{\nu}, \qquad \mathbf{x}_{2t} = -b_2 \mathbf{w} + a\boldsymbol{\nu}$$

とかくことが出来る。

さて歯面 Γ_i 上の噛合点 $\mathbf{x}_i$ に対し，時刻 $t + dt$ での噛合点を $\mathbf{x}_i + d_i\mathbf{x}_i$ とすれば

$$d_i\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{it}dt + \mathbf{x}_{ir}dr = -b_i\mathbf{w}dt + \boldsymbol{\nu}(adt + dr)$$

そこで歯面 Γ_i 上の曲線

$$adt + dr = 0 \qquad \cdots\cdots (31)$$

に沿うて考えれば

$$d_1\mathbf{x}_1 = -b_1\mathbf{w}dt, \qquad d_2\mathbf{x}_2 = -b_2\mathbf{w}dt \qquad \cdots\cdots (32)$$

歯面 Γ_i 上の曲線 (31) は谷村氏の滑り線[1]であり，接触線の軌跡面上の曲線 (31) が軌線であることは (32) から分かる。

そして

$$b_1 = \beta_1 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} / [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}], \qquad b_2 = \beta_2 - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} / [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}]$$

の逆数が滑り率である。この式で

$$\mathbf{q} = \Pi \times \mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 \mathbf{e}\,, \qquad \mathbf{w} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_2$$

であるから，可展面歯形歯車では，滑り率の逆数 b_1，b_2 が接触線 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t) + r\boldsymbol{\nu}(t)$ におけるパラメーター r の一次分数関数であるという，横田氏の結果(5) がすぐに見られる。

なお，$[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}] = 0$ をみたす接触線上の点は，一般に両歯車の相対ねじ運動の瞬間軸と，接触線との共通垂線が，接触線をきる点であり，その点での滑り率は 0 と考えられる。

最後に，接触線の近傍での干渉を考えよう。前節の点接触の場合における如く，共通接平面を媒介として考えて

歯車Ⅰが主動片なるか否かに従い　$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_2 / R_2 \gtrless \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1 / R_1$

そして，何れか一方を主動片と考えるとき

$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1 = p_t - \boldsymbol{\lambda}_t\cdot\mathbf{x}$　の符号が一定

でなければならない。これらの条件により，接触線の軌跡面として，採用出来る範囲，または有効歯形面として，採用し得る範囲が限定されるわけである。

相対曲率 $1/R_1 - 1/R_2$ は既に求めてある。それを用いて

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_2}{R_2} - \frac{\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_1}{R_1} = \frac{(p_t - \boldsymbol{\lambda}_t\cdot\mathbf{x})\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q}\,(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})^2}{(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} - \beta_1[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}])(\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} - \beta_2[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}])}$$

この式の値の符号の変ずる可能性のある点を考えてみよう。

a）$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} - \beta_i[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}] = 0$ なる接触直線上の点は

$$\rho_i = -\beta_i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\lambda} - [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\Pi] / (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})^2 \neq 0$$

なる限り，各々の t に対して一つ宛存在し，それは歯形曲線 Γ_i の反帰曲線上の点である。

b）$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} = 0$ なる接触線上の点 $\mathbf{x}$ は

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x} = p\,,\ \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda}\,,\ \boldsymbol{\lambda}\times\Pi\cdot\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\lambda}$$

の解である。$[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\Pi] \neq 0$ なる限り，斯様な点 $\mathbf{x}$ は唯一つ存在し，それは

$$\mathbf{x} = p\boldsymbol{\lambda} + \{([\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{e}_1\boldsymbol{\lambda}] - [\boldsymbol{\omega}_2\mathbf{e}_2\boldsymbol{\lambda}])(\boldsymbol{\lambda}\times\Pi)\times\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\lambda}\ \boldsymbol{\lambda}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})\}/[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\Pi]$$

t をパラメーターとして，これは一般に接触線の軌跡面に一つの曲線をえがくが，これが一つの限界曲線を与える。

$[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\Pi] = 0$ の場合の結果は次の通りである。

i）$\Pi = 0$，$\mathbf{e} \neq 0$　即ち平行軸の場合

$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{e} = 0$ ならば，接触直線上の全線に亘り $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} = 0$。

これは所謂圧力角 0° の場合である。

$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{e} \neq 0$ ならば，接触直線上の全線に亘り $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} \neq 0$

ii）$\Pi \neq 0$，$\mathbf{e} = 0$　即ち傘歯車の場合

接触線上の全線に亘り　$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} = 0$ となる。これは圧力角 0° の場合である。

なお，この傘歯車の場合，上記の $[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\Pi] \neq 0$ なる $\boldsymbol{\lambda}$ に対して $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} = 0$ をみたす接触線上の点は $p\boldsymbol{\lambda}$ であり，これは，t をパラメーターとして，一般に一つの曲線をえがくが特に $p = 0$ の場合，$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} = 0$ をみたす点は，軸交点だけになる。

iii）$\Pi \neq 0$，$\mathbf{e} \neq 0$　即ち食違軸歯車の場合

$\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1 > 0$ ならば $[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\Pi] = 0$ なる $\boldsymbol{\lambda}$ に対する接触線上の全線に亘り $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{q} \neq 0$ である。

$\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1 \leqq 0$ の場合は $[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\Pi] = 0$ なる条件に基き

$$\boldsymbol{\lambda} = \alpha\boldsymbol{\omega} + \beta\Pi$$

と表わすとき

$$\alpha^2 = -\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1/(\Pi^2 - \boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}^2),\ \beta^2 = 1/(\Pi^2 - \boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}^2)$$

ならば，接触線上の全線に亘り $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} = 0$

$$\alpha^2 \neq -\boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1/(\Pi^2 - \boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}^2) \text{ または } \beta^2 \neq 1/(\Pi^2 - \boldsymbol{\omega}_2\cdot\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}^2)$$

ならば，接触線上の全線に亘り $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} \neq 0$ である。

c) $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_i = 0$ なる接触線上の点 $\mathbf{x}$ は

$$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x} = \mathrm{p},\ \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda},\quad \boldsymbol{\lambda}_t\cdot\mathbf{x} = \mathrm{p}_t$$

の解である。幾何学的に云えば，これは時刻 t で考えて，接触直線と，共通接平面の静止空間における包絡面の特性直線との交点ということである。 $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\lambda}_t \neq 0$ 即ち $\Pi\cdot\boldsymbol{\lambda} \neq 0$ のときは，上記連立方程式の解は

$$\mathbf{x} = \mathrm{p}\boldsymbol{\lambda} + \{([\boldsymbol{\omega}_1\mathbf{e}_1\boldsymbol{\lambda}] - [\boldsymbol{\omega}_2\mathbf{e}_2\boldsymbol{\lambda}])\boldsymbol{\lambda}_t\times\boldsymbol{\lambda} + \mathrm{p}_t\boldsymbol{\lambda}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda})\}/\Pi\cdot\boldsymbol{\lambda}$$

t をパラメーターとして，これは一般に接触線の軌跡面上に一つの曲線をえがくが，これが一般に一つの限界曲線を与える。

$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\lambda}_t = \Pi\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0$ の場合の結果は，次の通りである。

i) $\Pi = 0,\ \mathbf{e} \neq 0$ 即ち平行軸の場合

$[\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}\boldsymbol{\lambda}] = 0$ ならば，接触線上の全線に亘り $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_i = 0$。平歯車で云えば，圧力角 90° の場合である。

$[\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}\boldsymbol{\lambda}] \neq 0$ ならば，接触線上の全線に亘り $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_i \neq 0$。

ii) $\Pi \neq 0,\ \mathbf{e} = 0$ 即ち傘歯車の場合

接触直線上の全線に亘り $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_i = 0$ となる。圧力角 90° の場合である。

iii) $\Pi \neq 0,\ \mathbf{e} \neq 0$ 即ち食違軸の場合

$\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\lambda} = 0$ または $\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{\lambda} = 0$ なる $\boldsymbol{\lambda}$ に対する接触線上の全線に亘り $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_i = 0$ となる。

$\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\lambda} \neq 0,\ \boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{\lambda} \neq 0$ ならば，接触線上の全線に亘り $\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_i \neq 0$。

かくて，最も一般の場合，即ち $\rho_i \neq 0$，$[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}\Pi] \neq 0$，$\Pi\cdot\boldsymbol{\lambda} \neq 0$ なる場合を考えれば，かかるtに対する接触直線上に，歯形曲面の反帰曲線上の点，$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{q} = 0$ なる点，$\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{v}_i = 0$ なる点が夫々一つ宛あり，時間 t が移るにつれて，接触線の軌跡面上に曲線をえがき，それが接触点の存在範囲に対する限界線を与えるわけである。

6. 平歯車，傘歯車

第 3 章で与えた直線接触に対する噛合条件式

$$\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\lambda} = -\beta_1(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\lambda}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (33)$$

$$\mathrm{p}_t + \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda} = \beta_1(\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda})$$

において

$$\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{e}_2\cdot\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{e}_1\cdot\boldsymbol{\lambda} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (34)$$

の場合は，噛合条件式は (33) 及び

$$\mathrm{p}_t + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (35)$$

となる。条件（34）について調べよう。座標原点Ｏを両歯車軸上 $\mathbf{e}_2 \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{e}_1 \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}_1$ となるよう定めれば，

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 - \mathbf{e}_1 \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1 - \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathrm{h} \boldsymbol{\omega} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (36)$$

$\boldsymbol{\omega}$ とのスカラー積を作って　　　　$\mathrm{h} = -\, \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{e} / \boldsymbol{\omega}^2$

斯様にとられた原点Ｏは，両歯車の相対ねじ運動の瞬間軸が，両歯車軸の共通垂線を截る点であり，h は reduced pitch である。(36) を (34) へ代入して

$$\mathrm{h}\ \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\lambda} = 0$$

$\mathrm{h} \neq 0$，$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\lambda} \equiv 0$ より Olivier の歯形の場合が得られる。

$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\lambda} \neq 0$ とする。　$\mathrm{h} = 0$ より $\boldsymbol{\Pi} = 0$ または $\mathbf{e} = 0$。これは平歯車，傘歯車の場合である。

a）$\boldsymbol{\Pi} = 0$，$\mathbf{e} \neq 0$ 即ち平歯車の場合。

噛合方程式は $\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_2$ に注意して

$$\boldsymbol{\lambda}_t - \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\lambda} = -\beta_1 (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda}) \cdots\cdots\cdots\cdots (33), \quad \mathrm{p}_t = -[\boldsymbol{\omega}_i \mathbf{e}_i \boldsymbol{\lambda}] \cdots\cdots\cdots\cdots (35)'$$

(33) は $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda} \neq 0$ なる条件の下に　　$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\lambda}_t = 0$

と同値である。これから　　　　　$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\lambda} =$ 定数　　　　$\cdots\cdots\cdots\cdots (33)'$

ここで　$\boldsymbol{\omega}_i = \omega_i \mathbf{i}$，$\mathbf{e}_i = \mathrm{e}_i \mathbf{k}$，$\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$

なる直角座標系を定め

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{i} \cos\theta + \mathbf{j} \sin\theta\ \mathrm{oco}\varphi + \mathbf{k} \sin\theta \sin\varphi$$

とすれば，噛合条件式 (33)′，(35)′ は夫々

θ は 定角，　$\mathrm{dp/dt} = \omega_i \mathrm{e}_i \sin\theta \cos\varphi$

となる。　$\theta = \pi/2$ とすれば，直歯平歯車の噛合方程式　　　$\mathrm{dp/dt} = \omega_i \mathrm{e}_i \cos\varphi$

が得られる。

b）$\boldsymbol{\Pi} \neq 0$，$\mathbf{e} = 0$ 即ち傘歯車の場合。

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = 0$　なので，噛合条件式は (33) 及び $\mathrm{p}_t \equiv 0$。(33) は $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda} \neq 0$ なる条件の下に $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ と同値であるから，この場合の噛合条件式は

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (36), \qquad \mathrm{p} = \text{定数} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

$\mathrm{p} = 0$ の場合が直歯傘歯車の場合である。ここで

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{i},\ \boldsymbol{\omega}_i = \omega_i (\mathbf{i} \cos\beta_i + \mathbf{j} \sin\beta_i),\quad \mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$$

なる直角座標系を定め

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{i} \cos\theta + \mathbf{j} \sin\theta \cos\varphi + \mathbf{k} \sin\theta \sin\varphi$$

とおけば，噛合条件式 (36) は

$$\mathrm{d}\theta/\mathrm{dt} = -\, \omega_i \sin\beta_i \sin\varphi$$

7. む す び

共通接平面の包絡面を与えるという形で，定回転比可展面歯形歯車の噛合論を展開した。点接触歯車については，噛合の条件，接触点の軌跡，接触点の近傍での干渉の条件を求めた。そしてその応用として，インボリュートねじ歯車の噛合を論じ，接触点の軌跡の範囲を定めた。

直線接触歯車については，嚙合の条件，接触点での主曲率半径，接触直線と垂直な法截口での相対曲率を求め，それを用いて，接触直線の近傍での干渉の条件を定め，更に干渉の限界点を明らかにした。

そして，最後に，以上の一般の場合から，如何にして，平歯車，傘歯車の嚙合方程式が導かれるかを示したものである。

本報告は日本機械学会第34期通常総会で発表したものに，その後得られた結果を増補したものである。

（昭和36年7月25日受理）

註 (1) 谷村，機械学会論文集　5巻18号（昭14）

(2) 荻野，機械学会第39期東京秋期講演大会（昭和36.10）前刷

(3) 前田，科学計測研究所報告1巻1号（昭26).

(4) 松山，科学計測研究所報告1巻3号（昭26).

(5) 横田，機械学会論文集　22巻 122号（昭31).

(6) 横田，機械学会北陸地方講演会（昭29.9.24).

(7) 荻野，機械学会論文集　23巻 134号（昭32).

山形大学紀要（工学）第7巻　第1号

A Study on the Meshing of Gears Toothed with Developable Surfaces

Shusaku OGINO

Yamagata Junior Technical College

In this paper, the author treats of the meshing of the gears toothed with developable surfaces, which are regarded as the envelope of the given common tangent planes in each gear system.

The meshings of point contact as well as of line contact are investigated.

Conditions of gear meshing and the formula of the relative curvature are given. Thus, conditions of interference are established and the interference points are made up clearly.